Quatre problèmes originaux

énoncés

Les problèmes sont présentés par ordre croissant de difficulté.

Problème 1

Déterminez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f\big(xf(y) + 1\big) = y\,f(x) + 1$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$.

Problème 2

Soient a, b des entiers strictement positifs et soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = a$, $x_1 = b$ et

$$x_{n+1} = \operatorname{ppcm}(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \operatorname{pgcd}(x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad n \geq 1.$$

Soit p un nombre premier divisant un terme x_n avec $n \geq 3$. Montrez que :

(a) si $p \mid \operatorname{pgcd}(a, b)$, alors p divise tous les termes de la suite ;

(b) si $p \nmid \operatorname{pgcd}(a, b)$, alors p divise exactement un terme de la suite et, de plus, $p = 3$ ou $p \equiv 1 \pmod 6$.

Problème 3

Soit ABC un triangle acutangle, O le centre de son cercle circonscrit et τ la tangente en A au cercle circonscrit. Soient B_1 et C_1 les symétriques respectifs de B et C par rapport à la droite τ, et soient P, Q les symétriques de A par rapport à B et C respectivement. Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle OB_1C_1, et soit X le point de la demi-droite (MA pour lequel $MA \cdot MX = MO^2$. Montrez que les points P, Q, O, X sont cocycliques.

Problème 4

Alex et Robin jouent au jeu suivant sur un plateau rectangulaire $m \times n$, avec $m, n \geq 2$, en disposant de $k \geq 2$ couleurs numérotées $0, 1, \ldots, k-1$. Au départ, toutes les cases sont incolores. En commençant par Alex, les deux joueurs frappent alternativement une case avec un marteau : une case incolore prend la couleur 0, et une case de couleur j passe à la couleur $j + 1 \pmod k$. Alex gagne si, après un coup quelconque, le plateau contient trois cases de même couleur dont deux se trouvent sur une même ligne et deux sur une même colonne ; Robin cherche seulement à l'en empêcher, aussi longtemps que dure la partie.

Déterminez tous les triplets (m, n, k) pour lesquels Alex possède une stratégie gagnante.