Patru probleme originale

enunțuri

Problemele sunt prezentate în ordinea crescătoare a dificultății.

Problema 1

Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că

$$f\big(xf(y) + 1\big) = y\,f(x) + 1$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Problema 2

Fie a, b numere naturale nenule și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a$, $x_1 = b$ și

$$x_{n+1} = \operatorname{cmmmc}(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \operatorname{cmmdc}(x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad n \geq 1.$$

Fie p un număr prim care divide un termen x_n cu $n \geq 3$. Demonstrați că:

(a) dacă $p \mid \operatorname{cmmdc}(a, b)$, atunci p divide toți termenii șirului;

(b) dacă $p \nmid \operatorname{cmmdc}(a, b)$, atunci p divide exact un termen al șirului și, în plus, $p = 3$ sau $p \equiv 1 \pmod 6$.

Problema 3

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, O centrul cercului său circumscris și τ tangenta în A la cercul circumscris. Fie B_1 și C_1 simetricele punctelor B, respectiv C față de dreapta τ, și fie P, Q simetricele punctului A față de B, respectiv C. Fie M centrul cercului circumscris triunghiului OB_1C_1, iar X punctul de pe semidreapta (MA pentru care $MA \cdot MX = MO^2$. Demonstrați că punctele P, Q, O, X sunt conciclice.

Problema 4

Vlad și Iorgu joacă următorul joc pe o tablă dreptunghiulară $m \times n$, cu $m, n \geq 2$, având la dispoziție $k \geq 2$ culori numerotate $0, 1, \ldots, k-1$. Inițial toate căsuțele sunt necolorate. Începând cu Vlad, cei doi lovesc alternativ câte o căsuță cu un ciocan: o căsuță necolorată primește culoarea 0, iar o căsuță de culoare j trece în culoarea $j+1 \pmod k$. Vlad câștigă dacă, după o mutare oarecare, pe tablă există trei căsuțe de aceeași culoare dintre care două se află pe aceeași linie și două pe aceeași coloană; Iorgu urmărește doar să împiedice acest lucru, oricât de mult ar dura jocul.

Determinați toate tripletele (m, n, k) pentru care Vlad are strategie de câștig.